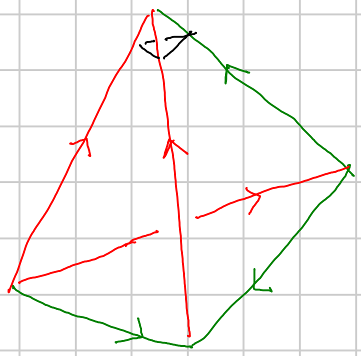
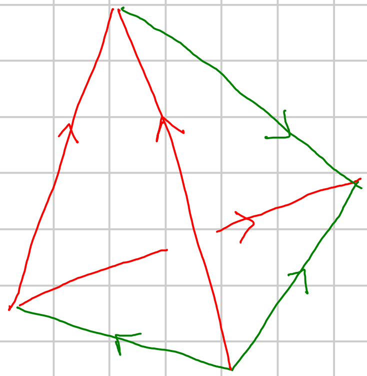
Geometria iperbolica 29-04





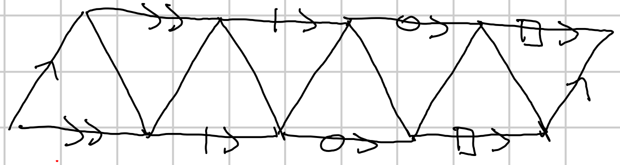
1 vertice

2 spigoli

4 facce

2 tetraedri

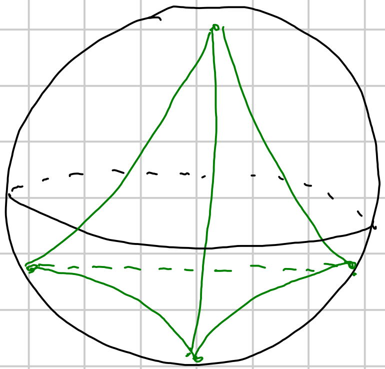
Figura di vertice:



– toro.

Idea: Realizzare ogni tetraedro ideale come un tetraedro ideale iperbolico

Inviluppo convesso in $\mathbb{H}^3$ di 4 punti su $\partial_\infty(\mathbb{H}^3)$ non coplanari.



in modo che le metriche iperboliche su ogni tetraedro ideale inducano la metrica iperbolica su M.

∘ Differenze col caso delle superfici:

1) Dato una mappa simpliciale φ_F fra due facce F_1 e F_2 di

due tetraedri Δ_1 e Δ_2, esiste un'unica identificazione tra le facce

dei corrispondenti tetraedri ideali che realizza F.

Dim: L'unica isometria di un triangolo ideale che preserva i vertici

è l'identità.

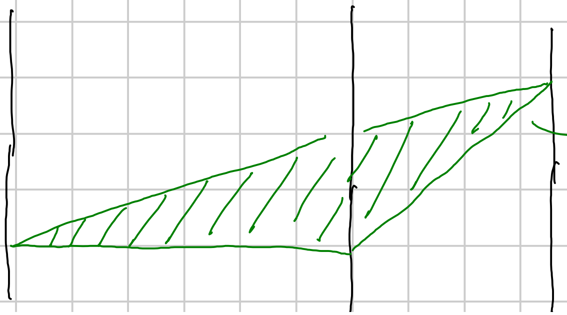
2) I tetraedri ideali iperbolici <u>non</u> sono tutti isometrici tra loro.

Un tetraedro ideale in $\mathbb{H}^3$ è determinato dai suoi 4 vertici ideali $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in \partial\mathbb{H}^3$.

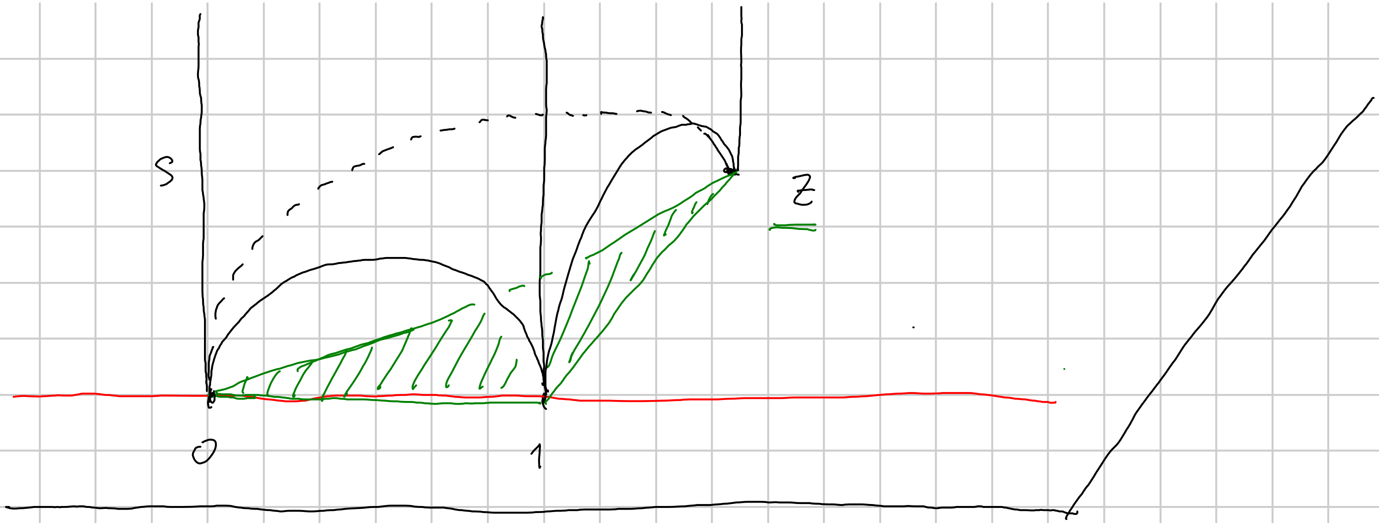
Modello semispazio: $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}\cup\{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. e $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$

$\exists!\ \varphi \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ t.c. $\varphi(v_1)=0$, $\varphi(v_2)=1$, $\varphi(v_3)=\infty$ $\varphi(v_4)\to z\in\mathbb{C}$

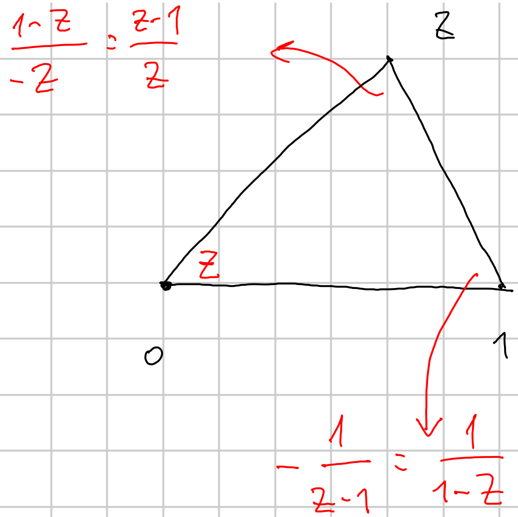
Inoltre, a meno di specchiare $z\mapsto\bar{z} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ possiamo supporre $\mathrm{Im}(z)>0$



Intersezione tra un'orosfera centrata in $+\infty$ e il tetraedro ideale. Triangolo euclideo.



Una sezione orosfera centrata in $+\infty$ può sempre essere rappresentata come un triangolo euclideo (in $\mathbb{C}$) con vertici in $0, 1$ e z t.c. $\operatorname{Im}(z) > 0$



Definiamo l'angolo complesso in un vertice v del triangolo come il rapporto dei due lati adiacenti (da sx a dx)

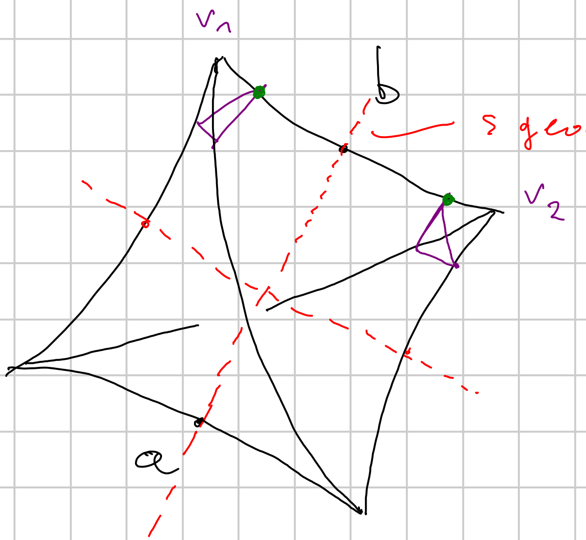
Otteniamo tre numeri complessi z_1, z_2, z_3 con $\mathrm{Im}(z_i) > 0$.
che soddisfano le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -1 \\ 1 - z_1 + z_1 z_2 = 0 \end{cases}$$

Uno qualsiasi dei numeri z_1, z_2, z_3 determina univocamente gli altri due

Dato un tetraedro ideale, quali angoli complessi ottengo considerando vertici diverse?

Gli stessi.



s geodetica perpendicolare ad a, b.

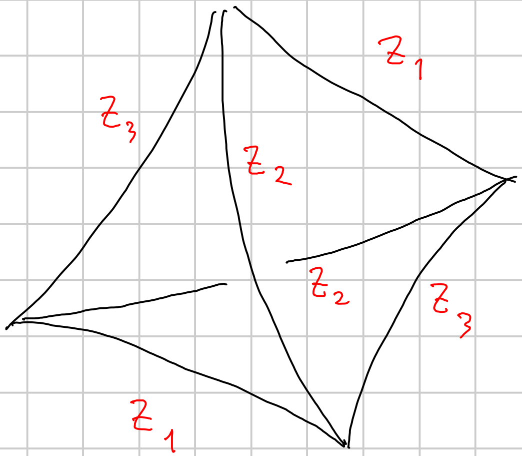
La rotazione di angolo π intorno a s

preserva i lati a e b $\Rightarrow$ preserva i vertici

del tetraedro ideale $\Rightarrow$ preserva il tetraedro

$\Rightarrow$ Gli angoli complessi sono naturalmente associati agli

spigoli del tetraedro, e spigoli opposti hanno lo stesso angolo complesso



$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -1 \\ 1 - z_1 + z_1 z_2 = 0 \end{cases}$$

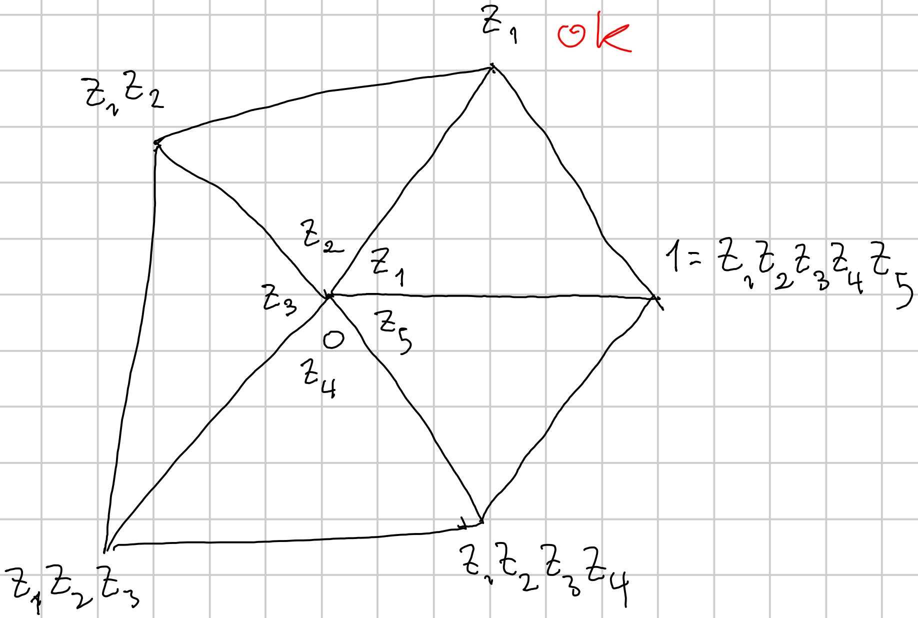
Data M 3-varietà e T una sua triangolazione ideale, comunque realizziamo i tetraedri di T come tetraedri ideali iperbolici, otteniamo una struttura iperbolica non completa $M \setminus \{1\text{-scheletro}\} = Y$

γ - non banale in $M \setminus \{1\text{-scheletro}\} = Y$

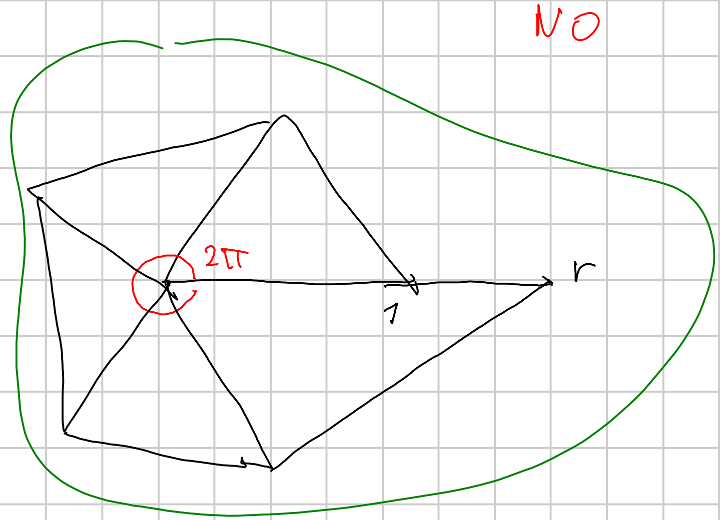
Fatto: Per estendere la struttura iperbolica di Y agli spigoli, dobbiamo scegliere i tetraedri ideali in modo che l'olonomia di γ sia banale.

- Consideriamo s uno spigolo ideale, e mandiamo i vertici a 0 e $+\infty$.

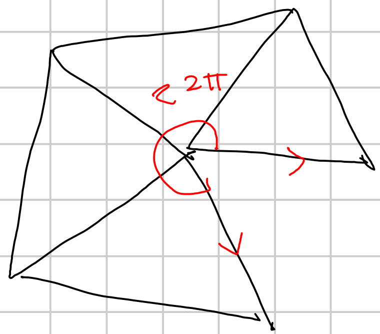
Guardiamo la figura di vertice



OK
z1
z1z2
z2
z1
z3
0
z5
z4
1 = z1z2z3z4z5
z1z2z3
z1z2z3z4



NO
2π
1
r



2π

Dato uno spigolo s (di valenza n). Se $z_1, \dots, z_n$ sono gli angoli complessi associati a tale spigolo, dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$1) \quad \prod_{i=1}^{n} z_i = 1$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^{n} \arg(z_i) = 2\pi$$

$\rightarrow$ equazioni di consistenza per lo spigolo s

Come equazioni in $\widetilde{\mathbb{C}}^* = \{\rho e^{i\theta} \mid \rho > 0, \theta \in \mathbb{R}\}$ $\quad \prod_{i=1}^{n} z_i = e^{2\pi i} \neq 1$ in $\widetilde{\mathbb{C}}^*$

$\arg(z_i) \in (0, \pi)$

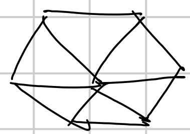
Se sono soddisfatte tutte le equazioni di consistenza, M ha una metrica iperbolica (possibilmente non completa) ottenuta realizzando ogni tetraedro come un tetraedro ideale iperbolico con gli angoli complessi determinati dalla soluzione.

Equazioni di completezza.

Supponiamo che siano soddisfatte le equazioni di consistenza.

Ogni toro di bordo T ha una struttura di similarità.

Ogni toro è naturalmente tassellato in triangoli euclidei (ben definiti a meno di similarità), e attorno a ogni vertice:

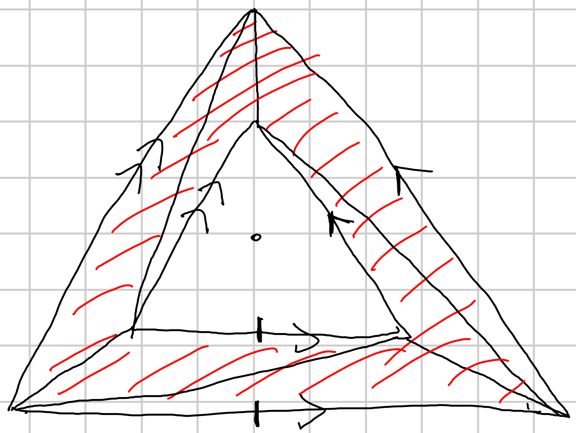


Domanda: Quando le strutture euclidee sui triangoli si incollano a dare una struttura euclidea?

Esempio: Struttura di similarità sul toro non euclidea:

$$T = \frac{\mathbb{C} \setminus \{0\}}{\mathbb{Z}}$$

Azione generata da $z \mapsto 2 \cdot z$



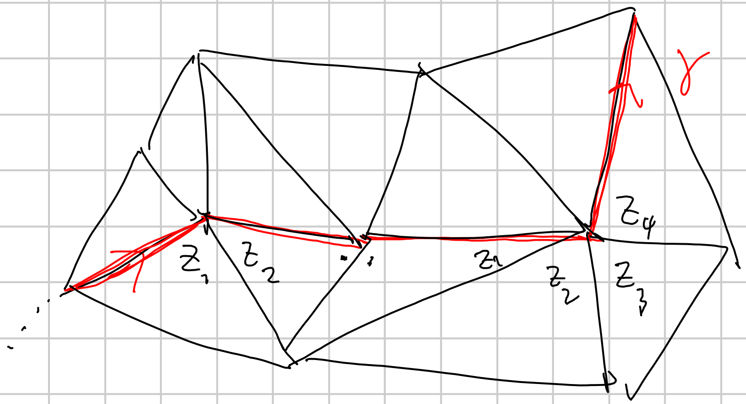
Struttura di similarità.

Attorno a ogni vertice le equazioni di consistenza sono soddisfatte.

Dato $\gamma \in \pi_1(T) = H_1(T, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$, γ è rappresentato da un cammino simpliciale nella triangolazione.

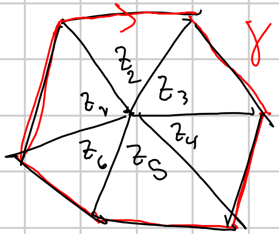
Definiamo $\mu(\gamma) \in \mathbb{C}^*$ come $\mu(\gamma) = (-1)^{|\gamma|} \cdot \prod$ moduli complessi che γ incontra alla sua dx in ciascun vertice.

\# di spigoli di γ

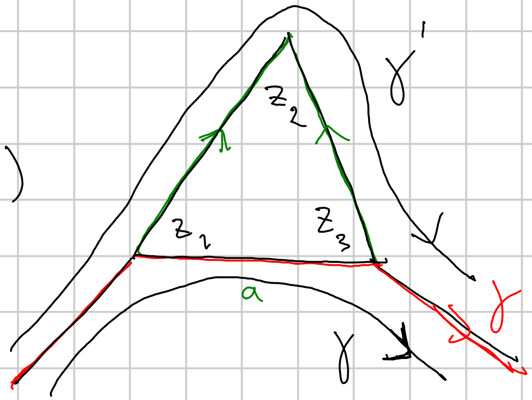


$\mu(\gamma)$ è ben definito e definisce un omomorfismo $\mu : \pi_1(T) \to \mathbb{C}^*$

Buona def:

1) 

$\mu(\gamma) = \prod z_i = 1$ (poiché sono soddisfatte le equazioni di consistenza).

2) 

$\mu(\gamma) = \mu(\gamma')$

poiché

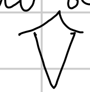
$z_1 z_2 z_3 = -1$ e $(-1)^{|\gamma|} = -(-1)^{|\gamma'|}$

Ogni due cammini omotopi si ottengono l'uno dall'altro tramite composizione di queste mosse.

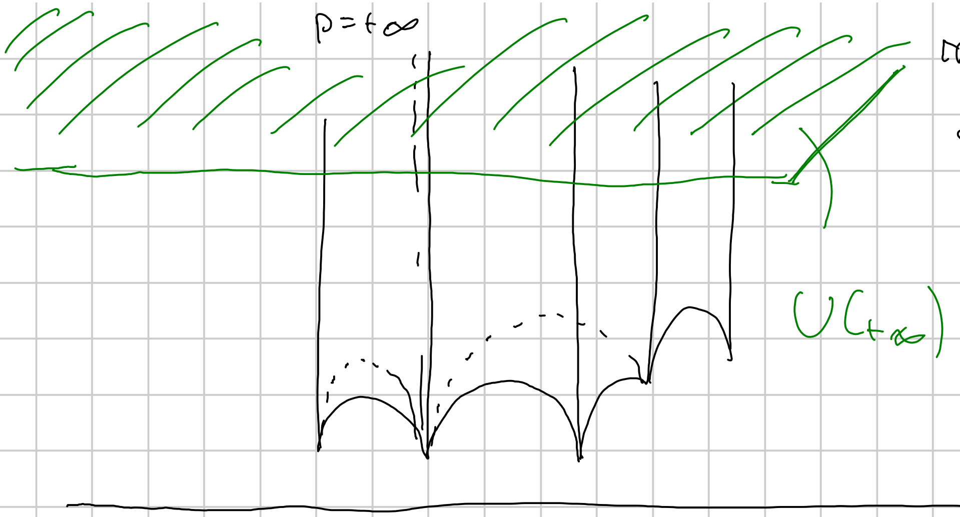
Per ogni toro T abbiamo $\mu: \pi_1(T) \to \mathbb{C}^*$

Prop: Sono equivalenti:

1) μ è l'omomorfismo banale
2) T ha una struttura euclidea
3) La metrica in un intorno del vertice ideale corrispondente a T è completa.



Dim: Ragionare come nel caso delle superfici in cui $s_1 + \dots + s_n = 0$ -



$\pi_1(T) \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ agisce per traslazioni sulla collezione di tetraedri ideali con vertice in $p=+\infty$

Se ci fossero omotetie corrisponderebbero a $\gamma \in \pi_1(T)$ t.c. $\mu(\gamma) \neq 1$

Se μ è banale $\pi_1(T)$ agisce tramite traslazioni

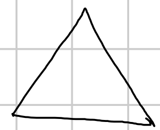
$U(+\infty)$ viene preservata e $\dfrac{U(+\infty)}{\pi_1(T)} = V$ - V è una cuspide troncata e ha una metrica completa.

Corollario: Per più vertici ideali le equazioni di completezza devono essere verificate intorno a ogni vertice.
Se ciò accade M ha una metrica completa.

Caso nodo figura 8. Realizziamo ogni tetraedro come un tetraedro ideale <u>regolare</u>.

$\downarrow$

Tetraedro regolare euclideo, normalizzato in modo che i vertici v_1, v_2, v_3, v_4 giacciano su $S^2 = \partial \mathbb{H}^3$. Inviluppo convesso di v_1, v_2, v_3, v_4

Figura vertice di un tetraedro regolare: triangolo equilatero 

$z_1, z_2, z_3 = e^{\frac{\pi i}{3}}$. Diamo una soluzione completa (diamo una metrica euclidea sul bordo).

Struttura euclidea: ok perché i lati hanno tutti la stessa lunghezza